PART5 三角関数の次数を下げる

要点整理と公式

要点① 2 倍角の公式の利用

三角関数の倍角(2 倍角)の公式を次のように変形し，三角関数の次数を下げることで，不定積分が求められる形にする。

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \iff \sin x\cos x =$$

$$\cos 2x = 1-2\sin^2 x \iff \sin^2 x =$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x-1 \iff \cos^2 x =$$

(ex) $\displaystyle\int \sin^2 x dx = \int \qquad dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

同様に，3 倍角の公式とその変形により，三角関数の次数を下げることができる。

$$\sin 3x = 3\sin x-4\sin^3 x \iff \sin^3 x = \frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$$

$$\cos 3x = -3\cos x+4\cos^3 x \iff \cos^3 x = \frac{3\cos x+\cos 3x}{4}$$

要点② 積→和の公式

三角関数の加法定理

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ……①

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ……②

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ……③

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ……④

において

① ＋ ②より $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ ……⑤

① − ②より $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$ ……⑥

③ ＋ ④より $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$ ……⑦

③ − ④より $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ ……⑧

⑤～⑧より，次の公式が得られる。

積→和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

これらの公式を用いることで，三角関数の次数を下げ，不定積分が求められる形に変形することができる。

(ex) $\displaystyle\int\sin 3x\cos 2x\,dx=\int\frac{1}{2}(\qquad+\qquad)dx=\frac{1}{2}\int(\sin 5x+\sin x)dx$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x-\cos x\right)+C=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+C$$

5 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \cos^2 x dx$　　(2) $\int \sin^2 3x dx$

(3) $\int \sin 2x \cos 4x dx$　　(4) $\int \cos 3x \cos x dx$　　(5) $\int \sin 3x \sin 5x dx$

Point Pickup

公式を利用した三角関数の不定積分

・2 倍角の公式の利用

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

・積→和の公式の利用

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

により，不定積分が求められる形に変形する。

第15講 PART5 確認問題

次の不定積分を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

ただし，C は積分定数とする。

1 $\displaystyle\int \sin x\cos x dx=$ ア $+C$

① $\cos 2x$　② $\frac{1}{2}\sin 2x$

③ $\frac{1}{4}\cos 2x$　④ $-\frac{1}{4}\cos 2x$

2 $\displaystyle\int \cos^2 3x dx=$ イ $+C$

① $\frac{1}{2}x+\sin 6x$　② $\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\cos x$

③ $\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x$　④ $\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x$

3 $\displaystyle\int \sin 3x\cos x dx=\frac{1}{\boxed{ウ}}\int(\sin\boxed{エ}x+\sin\boxed{オ}x)dx$

$=$ カ $+C$

ただし，エ ＞ オ とする。

[カ の選択肢]

① $\frac{1}{2}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x$　② $\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x$

③ $\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x$　④ $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x$

4 $\int \cos 4x \cos 3x dx =$ キ $+C$

① $\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin 3x$ ② $\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{3}\cos 3x$

③ $\frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{2}\sin x$ ④ $\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{2}\cos x$

5 $\int \sin x \sin 4x dx =$ ク $+C$

① $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{8}\sin 4x$ ② $\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{8}\cos 4x$

③ $\frac{1}{10}\sin 5x-\frac{1}{6}\sin 3x$ ④ $-\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{6}\sin 3x$

[MEMO]

PART5 三角関数の次数を下げる

5 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \cos^2 x dx$　　(2) $\int \sin^2 3x dx$

(3) $\int \sin 2x \cos 4x dx$　　(4) $\int \cos 3x \cos x dx$　　(5) $\int \sin 3x \sin 5x dx$

[解答]

(1) $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

(2) $\int \sin^2 3x dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 6x)dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C = \frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+C$

(3) $\int \sin 2x \cos 4x dx = \frac{1}{2}\int\{\sin 6x+\sin(-2x)\}dx = \frac{1}{2}\int(\sin 6x-\sin 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C = -\frac{1}{12}\cos 6x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

(4) $\int \cos 3x \cos x dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C = \frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

(5) $\int \sin 3x \sin 5x dx = \int \sin 5x \sin 3x dx = -\frac{1}{2}\int(\cos 8x-\cos 2x)dx$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C = -\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

第15講　PART5 確認問題 解答

1

[正解] ア：④

[解説]

$\sin x\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}$ であるから，[A]

$$\int \sin x\cos x dx=\frac{1}{2}\int \sin 2x dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x)+C$$
$$=-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

[A]　2倍角の公式
$\sin 2x=2\sin x\cos x$
$\Longleftrightarrow\quad \sin x\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2}$

2

[正解] イ：③

[解説]

$\cos^2 3x=\dfrac{1+\cos 6x}{2}$ であるから，[B]

$$\int \cos^2 3x dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 6x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{6}\sin 6x\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x+C$$

[B]　2倍角の公式
$\cos 2x=2\cos^2 x-1$
$\Longleftrightarrow\quad \cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

3

[正解] ウ：2，エ：4，オ：2，カ：④

[解説]

$$\sin 3x\cos x=\frac{1}{2}\{\sin(3x+x)+\sin(3x-x)\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 4x+\sin 2x) \quad \text{[C]}$$

であるから，

$$\int \sin 3x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 4x+\sin 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$

$$=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

[C]　積→和の公式

$\sin\alpha\cos\beta$

$=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

4

[正解] キ：③

[解説]

$$\cos 4x\cos 3x=\frac{1}{2}\{\cos(4x+3x)+\cos(4x-3x)\}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 7x+\cos x) \quad \text{[D]}$$

であるから，

$$\int \cos 4x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 7x+\cos x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sin 7x+\sin x\right)+C$$

$$=\frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{2}\sin x+C$$

[D]　積→和の公式

$\cos\alpha\cos\beta$

$=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

5 [正解] ク：④

[解説]

$$\sin x \sin 4x = -\frac{1}{2}\{\cos(x+4x)-\cos(x-4x)\}$$ [E]

$$= -\frac{1}{2}(\cos 5x - \cos 3x)$$ [F]

であるから，

$$\int \sin x \sin 4x dx = -\frac{1}{2}\int(\cos 5x - \cos 3x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{3}\sin 3x\right) + C$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{6}\sin 3x + C}$$

[E]　積→和の公式

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

[F]　$\cos(-\theta)=\cos\theta$